

Prova Scritta di Fisica II

18-01-2010

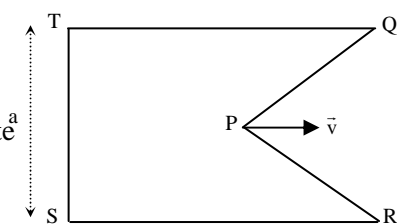
Compito A

Problema n. 1

Una spira della forma riportata in figura, con a , è immersa in un campo di induzione magnetica \vec{B} uniforme, perpendicolare al piano del foglio ed uscente da esso, di modulo B . Il vertice P si sposta verso destra con velocità costante v in modo che i tratti \overline{PQ} e \overline{PR} , costituiti da fili di lunghezza variabile, di resistenza elettrica trascurabile, rimangano rettilinei e di lunghezza identica tra loro, mentre gli altri vertici restano fermi. La spira, in toto, ha resistenza elettrica R_0 .

Calcolare:

1. La forza elettromotrice che si induce nella spira.
2. La corrente indotta in valore e verso.
3. La potenza necessaria per mantenere la velocità del punto P costante



\vec{B} uscente dal piano del foglio

Opzionale: Calcolare il lavoro nell'unità di tempo (potenza) fatto dalla forza di Lorentz (formula di Laplace) che sente il segmento PQ quando quella venga applicata nel suo punto medio.

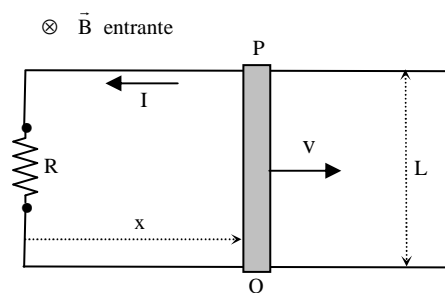
Valori numerici: $a = 50 \text{ cm}$, $B = 3 \cdot 10^{-5} \text{ T}$, $v = 5 \text{ m/sec}$, $R_0 = 2 \cdot 10^{-3} \Omega$

Problema n. 2

Nel circuito mostrato in figura, la sbarretta PQ, di resistenza trascurabile, scivola parallelamente a se stessa con velocità costante \vec{v} , diretta verso destra. Il circuito è immerso in un campo di induzione magnetica \vec{B} uniforme, ortogonale al piano del foglio ed entrante. Trascurando l'attrito e l'autoinduzione, determinare:

- Il valore del modulo di \vec{v} affinché nel circuito circoli una corrente di intensità assegnata I .
- La forza magnetica (modulo, direzione e verso) agente sulla sbarretta.
- La potenza che occorre fornire alla sbarretta.

Valori numerici: $B = 1 \text{ T}$, $R = 2 \Omega$, $L = 50 \text{ cm}$, $I = 0.5 \text{ A}$.



SOLUZIONI

N.B.: I dati numerici si riferiscono al Compito A

Problema n.1

Il punto P nel tempo dt si sposta del tratto $\overline{PP'} = vdt$. L'area della spira aumenta dunque del doppio dell'area del triangolo $PP'Q$:

$$dS = 2 \left(\frac{1}{2} vdt \frac{a}{2} \right) = \frac{av}{2} dt$$

Conseguentemente, il flusso del campo \vec{B} attraverso la spira varia di:

$$d\Phi = B dS = \frac{avB}{2} dt$$

Pertanto, il valore della forza elettromotrice è:

$$fem = \frac{d\Phi}{dt} \quad \rightarrow \quad fem = \frac{avB}{2}$$

e quindi la corrente indotta vale:

$$i = \frac{fem}{R_0} \quad \rightarrow \quad i = \frac{avB}{2R_0}$$

Passando alle grandezze numeriche abbiamo:

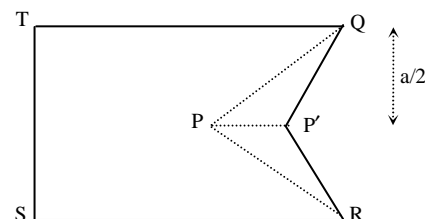
$$fem = \frac{50 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot 10^{-5}}{2} \cong 3.75 \cdot 10^{-5} \text{ V}$$

$$i = \frac{50 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} \cong 0.0187 \text{ A} \cong 19 \text{ mA}$$

La corrente indotta deve girare in senso orario. Solo così infatti, nel rispetto della legge di Lenz, il flusso del campo prodotto dalla corrente indotta tende a compensare la variazione di flusso che l'ha generata.

Per la conservazione dell'energia, la potenza necessaria per mantenere la velocità del punto P costante, è uguale alla potenza sviluppata per effetto joule nella spira:

$$P = i^2 R_0 = \frac{a^2 v^2 B^2}{4 R_0} \quad \rightarrow \quad P = \frac{(50 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 5^2 \cdot (3 \cdot 10^{-5})^2}{4 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} \cong 7.03 \cdot 10^{-7} \text{ W} = 0.703 \mu\text{W}$$



\vec{B} uscente dal piano del foglio

OPZIONALE

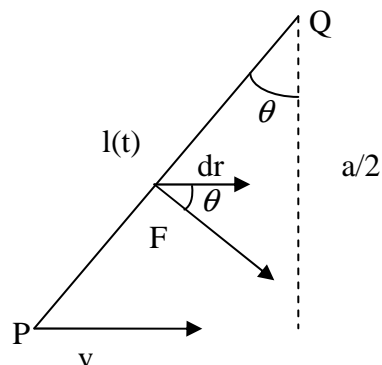
NELL'IPOTESI IN CUI LA CORRENTE VADA DA "P" A "Q", LA SOLUZIONE E' LA SEGUENTE.

La forza di Lorentz è data dalla seconda legge di Laplace, che, integrata sulla lunghezza del filo PQ (variabile rispetto al tempo), ci dà:

$$F = Bi l(t)$$

Da cui il lavoro:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = Bi l(t) dr \cos \theta$$



Ma: $l(t) = \frac{a}{2 \cos \theta}$, e $dr = v/2 dt$, da cui:

$$dL = Bi \frac{a}{4} v dt$$

Infine possiamo ricavare il lavoro per unità di tempo:

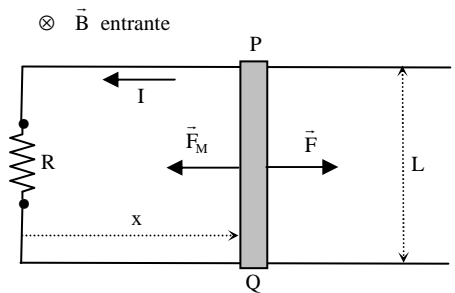
$$\frac{dL}{dt} = Bi \frac{a}{4} v$$

Problema n.2

➤ Calcolo del modulo della velocità

Consideriamo la sbarretta nella generica posizione individuata dalla distanza x . Orientando l'area della spira, costituita dalla sbarretta PQ e dalla resistenza R , con il versore \hat{n} della normale uscente dal piano del foglio, il flusso del campo \vec{B} attraverso la spira vale:

$$\Phi = (-B \hat{n}) \cdot (Lx \hat{n}) = -BLx$$



Per la legge dell'induzione elettromagnetica la corrente indotta vale:

$$I = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} \rightarrow I = \frac{BL}{R} \frac{dx}{dt} \rightarrow I = \frac{BLv}{R}$$

Il segno più sta a significare che la corrente indotta circola in senso antiorario, cioè concorde al verso indotto dall'orientamento della spira, come, d'altra parte, può verificarsi facilmente applicando la legge di Lenz.

Dalla relazione precedente ricaviamo:

$$v = \frac{IR}{BL} \rightarrow v = \frac{0.5 \cdot 2}{1.50 \cdot 10^{-2}} = 2 \text{ m/s}$$

➤ Calcolo della forza magnetica agente sulla sbarretta

Sulla sbarretta, attraversata dalla corrente I nel verso che va da Q a P, agisce la forza magnetica:

$\vec{F}_M = I \vec{QP} \wedge \vec{B}$ il cui modulo è:

$$F_M = ILB \rightarrow F_M = \frac{B^2 L^2 v}{R} \rightarrow F_M = \frac{1^2 \cdot (50 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 2}{2} = 0.25 \text{ N}$$

avente direzione perpendicolare al piano formato dai vettori \vec{QP} e \vec{B} , con verso dato dalla regola della mano destra: \vec{F}_M è dunque antiparallela a \vec{v} .

➤ Calcolo della potenza

Per mantenere la velocità costante della sbarretta occorre applicare una forza \vec{F} uguale e contraria a \vec{F}_M , bisogna cioè fornire potenza:

$$P = Fv \rightarrow P = \frac{B^2 L^2 v^2}{R} \rightarrow P = \frac{1^2 \cdot (50 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 2^2}{2} = 0.5 \text{ W}$$

D'altra parte la potenza dissipata per effetto Joule nella resistenza R vale:

$$P_{\text{joule}} = I^2 R \rightarrow P_{\text{joule}} = \left(\frac{BLv}{R} \right)^2 R \rightarrow P_{\text{joule}} = \frac{B^2 L^2 v^2}{R}$$

Risulta: $P = P_{\text{joule}}$, in accordo con il principio della conservazione dell'energia, quindi con la legge di Lenz che ne è conseguenza.